

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16 FEBRUARIE 2019

Clasa a V-a

Problema 1.

a) În vacanță Alexandru își ajută bunicii să schimbe scândurile rupte din gardul care înconjoară grădina de legume. Înainte însă, pasionat fiind de matematică, a numerotat cele 1000 de scânduri care formau gardul astfel : pe prima scândură a scris cifra 1, pe următoarele două scânduri a scris cifra 2, pe următoarele trei scânduri a scris cifra 3 ș. a. m. d. . Alexandru a observat că numărul scândurilor care trebuie înlocuite este egal cu numărul numerelor prime folosite la numerotare. Determină numărul scândurilor care trebuie schimbate.

b) Determină numere naturale de forma $\overline{28abcd}$, care se divid simultan cu 7, cu 11 și cu 13?

Sorin Furtună și Florin Marcu, Călărași

Soluție: a) Dacă n este cel mai mare număr folosit pentru numerotare, atunci Alexandru a scris cel mult

$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ numere. Din $\frac{n(n-1)}{2} < 1000 \leq \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow n = 45 \Rightarrow$ numărul scândurilor care trebuie schimbate este egal cu $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 + 41 + 43 = 281$.

b) $n:7, n:11, n:13 \Rightarrow n:1001$. Deoarece $1001 \cdot xyz = xyzxy \Rightarrow 280280, 281281, \dots, 289289$.

Problema 2. Într-o urnă sunt numai bile albe, roșii, verzi sau galbene și numărul acestora este mai mic decât 700. Probabilitatea de a extrage o bilă albă este egală cu $\frac{1}{6}$, probabilitatea de a extrage o bilă roșie este egală

cu $\frac{3}{10}$, iar probabilitatea de a extrage o bilă verde este egală $\frac{3}{8}$.

a) Calculează probabilitatea de a extrage din urnă o bilă galbenă.

b) Determină numărul bilelor din urnă dacă știi că acesta este cel mai mare număr natural pentru care sunt adevărate ipotezele din enunțul problemei.

Camelia Iordache, Călărași

Soluție: a) Dacă a, r, v, g reprezintă numărul bilelor albe, roșii, verzi, galbene și n numărul bilelor din urnă,

atunci $\frac{a}{n} = \frac{1}{6}, \frac{r}{n} = \frac{3}{10}, \frac{v}{n} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}n, r = \frac{3}{10}n, v = \frac{3}{8}n \Rightarrow g = n - (a + r + v) = \frac{19}{120}n \Rightarrow \frac{g}{n} = \frac{19}{120}$.

b) Dacă $\frac{a}{n} = \frac{1}{6}$ și $\frac{r}{n} = \frac{3}{10}$ și $\frac{v}{n} = \frac{3}{8} \Rightarrow 6|n$ și $10|n$ și $8|n \Rightarrow n = k \cdot [6, 8, 10] = 120k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 600$.

Problema 3. Toți elevii unei școli de muzică sunt înscriși la cel puțin una din grupele care studiază pianul, vioara sau flautul. Într-un proiect școlar, un grup de elevi a ajuns la următoarele concluzii:

- Zece elevi studiază pianul și vioara.
 - Opt elevi studiază flautul și vioara.
 - Cinci elevi studiază pianul și flautul.
 - Doi elevi studiază toate cele trei instrumentele.
 - Numărul elevilor care studiază un instrument este același, indiferent de instrument.
 - Când s-au format orchestre camerale de câte 4 sau de câte 5 elevi, a rămas de fiecare dată un elev care nu a putut face parte din orchestră.
 - Numărul elevilor din școală este cel mai mic număr posibil care verifică toate condițiile anterioare.
- Câți elevi sunt la școala de muzică?

prof. Gabriela Ruse, Călărași

Soluție: Dacă f este mulțimea elevilor care studiază flautul, p este mulțimea elevilor care studiază pianul și v este mulțimea elevilor care studiază vioara atunci: $|p \cap v| = 10, |f \cap v| = 8, |f \cap p| = 5, |f \cap p \cap v| = 2, |f| = |p| = |v| = a$, unde a este număr natural și din **a), b), d)** rezultă $a \geq 16$ (1). Dacă $|f \cup p \cup v| = n$, atunci din **f)** rezultă $4|(n-1)$ și $5|(n-1) \Rightarrow 20|(n-1)$, deci există k număr natural astfel încât $n = 20k + 1$ (2).

Cum $|f \cup p \cup v| = |f| + |p| + |v| - |f \cap p| - |v \cap p| - |f \cap v| + |f \cap p \cap v|$, rezultă $n = 3a - 21 \Rightarrow 3|n$ (3). Din (1), (2), (3) și n cel mai mic număr cu proprietățile respective rezultă $n = 81$.

Problema 4.

a) Imaginea alăturată reprezintă un evantai. Toate unghiurile formate de două nervuri consecutive au aceeași măsură. Câte nervuri poate avea un astfel de evantai care are proprietatea că la o deschidere în semicerc (altfel spus: unghiul format de nervurile extreme este alungit) măsura unghiului format de două nervuri consecutive este egală cu n° , unde n este un număr natural mai mic decât 60 și mai mare decât 10.



b) Arătați că bisectoarele unei perechi de unghiuri alterne interne formate de o secantă cu două drepte paralele sunt, la rândul lor, paralele.

c) Fie $\angle AOB$ ascuțit, dreptele $OM \perp OA$ și $ON \perp OB$, astfel încât punctele M și N sunt de aceeași parte a dreptei OB . Arătați că bisectoarele unghiurilor AOB și MON sunt perpendiculare.

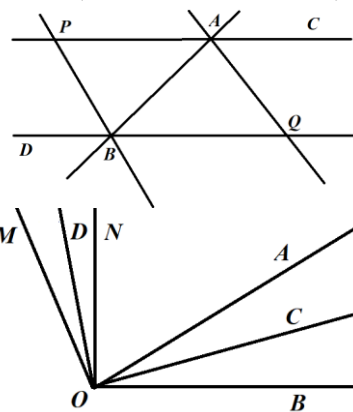
Soluție: a) Numărul natural n este un divizor al lui 180, mai mic decât 60 și mai mare decât 10, rezultă $n \in \{45, 36, 30, 20, 18, 15, 12\} \Rightarrow$ numărul de nervuri este un element al mulțimii $\{5, 6, 7, 9, 11, 13, 16\}$.

b) În desenul alăturat $AC \parallel BD$, dreapta AB este secantă, $\angle BAC$ și $\angle ABD$ sunt unghiuri alterne interne, semidreptele AQ și BP sunt bisectoarele unghiurilor $\angle BAC$, respectiv $\angle ABD$.

$$m(\angle BAQ) = \frac{1}{2}m(\angle BAC) = \frac{1}{2}m(\angle ABD) = m(\angle ABP) \Rightarrow AQ \parallel BP.$$

c) Dacă semidreptele OC și OD sunt bisectoarele unghiurilor $\angle AOB$, respectiv $\angle MON$, atunci $m(\angle COD) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}m(\angle AOB) + m(\angle AON) + \frac{1}{2}m(\angle MON) = \\ &= \frac{1}{2}[90^\circ - m(\angle AON)] + m(\angle AON) + \frac{1}{2}[90^\circ - m(\angle AON)] = 90^\circ \end{aligned}$$



Probleme au fost selectate și prelucrate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Baremul de notare este: Problema 1. a) 1 punct, b) 2 puncte, c) 2 puncte, d) 2 puncte; Problema 2. a) 3 puncte, b) 4 puncte; Problema 3. a) 3 puncte, b) 4 puncte; Problema 4. a) 2 puncte, b) 2 puncte, c) 3 puncte